Wintersemester 2005/06
Reimund Albers

Arithmetik als Prozess

Wiederholungsklausur

Name:________________________________ Mat.Nr.:__________________

Studienziel: Staatsexamen P oder SI

Bachelor (FBW) P oder SI

bitte ankreuzen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe	Übungen
maximal								9,6
erreicht								

Endsumme:

Zugelassene Hilfsmittel:
2 Blatt = 4 Seiten eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner

Bitte weisen Sie sich durch einen Lichtbildausweis und die Immatrikulationsbescheinigung aus.

Wiederholung
WiSe 05/06

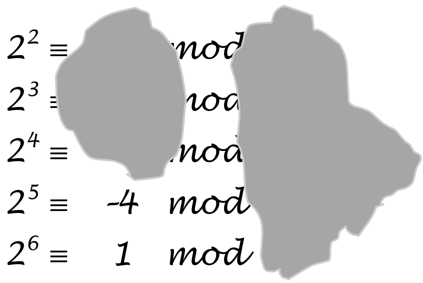
Grundsätzliches: Eine Klausur ist eine Gelegenheit, dem Prüfer zu zeigen, was Sie alles wissen. Es ist also in Ihrem Interesse, dass Ihre Ausführungen lesbar, verständlich und logisch nachvollziehbar sind. Für Studierende des Lehramts ist eine Klausur immer auch eine Prüfung für die Fähigkeit, mathematische Dinge klar und verständlich darzustellen.

1. Logik
   In der Aufgabe geht es wieder einmal um Spielmarken, die auf der einen Seite einen Buchstaben haben und auf der anderen Seite eine Zahl. Zu diesen Spielmarken betrachten wir die Bedingung:
   „Wenn der Buchstabe ein Vokal ist und die Zahl gerade ist, dann ist die Zahl eine 5“
   a. Geben Sie ein Beispiel für eine Spielmarke an, die dieser Bedingung widerspricht.
   b. Gibt es Spielmarken, die dieser Bedingung nicht widersprechen? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an, wenn nein, begründen Sie warum nicht.
   c. Bilden Sie zur Bedingung die Kontraposition.
      Gibt es Spielmarken, die der Kontraposition nicht widersprechen? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an, wenn nein, begründen Sie warum nicht.
   d. Gibt es Plättchen, die der Kontraposition nicht widersprechen, wohl aber der Ausgangsbedingung? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an, wenn nein, begründen Sie warum nicht.

2. Euklidischer Algorithmus und ggT
   a. Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den ggT(299, 221).
   b. Finden Sie für die Gleichung
      $221x + 299y = G$ mit G der in a. berechnete ggT(299, 221)
      ein ganzzahliges Lösungspaar (x,y)
      Machen Sie deutlich, wie Sie die Lösung gefunden haben.
   c. Wieso gibt es für die Gleichung
      $221x + 299y = 1300001$
      kein ganzzahliges Lösungspaar (x,y)?

3. Kombinatorik
   In einer Urne liegen 6 Kugeln. Zwei mit der Beschriftung „A“, eine mit der Beschriftung „B“ und drei mit der Beschriftung „C“.
   Also kurz: A A B C C C
   a. Wie viele Permutationen dieser 6 Kugeln gibt es?
   b. Jede dieser Permutation ist ein sechsbuchstabiges (abstraktes) Wort. Stellen Sie sich alle Wörter in einer alphabetischen Liste aufgeschrieben vor.
      1. AABCCC   2.AACBCC   3.AACCBC ...
      An welcher Position steht das erste Wort, das mit B anfängt?
   c. Sie sollen aus den 6 Buchstabenkugeln 3 auswählen. Wie viele Dreiergruppen gibt es, wenn es auf die Reihenfolge nicht ankommt. Also: „AAB“ und „ABA“ sind die gleiche Dreiergruppe.

4. Kongruenzrechnung, Teilbarkeit
   a. In einem alten Dokument ist eine Rechnung durch Schimmelflecken unleserlich geworden:



      Rekonstruieren Sie die gesamte Rechnung.
   b. Berechnen Sie die Gewichte für die gewichtete Quersumme für die Teilbarkeit durch 41. Gehen Sie auf die periodische Wiederholung der Gewichte ein.
      Bestimmen Sie dann in der Zahl 1x02y1 die Ziffern x und y so, dass die Zahl durch 41 teilbar ist.

5. Kongruenz und kleiner Satz von Fermat
   Achten Sie in beiden Aufgabenteilen darauf, dass die Rechnungen nicht die Grenze von 8 Stellen überschreiten. Wichtig ist, dass klar wird, in welche Teilrechnung Sie die Gesamtrechnung zerlegen.
   a. Berechnen Sie mit einem einfachen Rechner mit 8 Stellen Anzeige x in der Kongruenz $x \equiv 23^{92} \bmod 31$, $0 \le x < 31$. Verwenden Sie dabei den kleinen Satz von Fermat.
   b. Lösen Sie das entsprechende Problem für die Kongruenz $x \equiv 13^{92} \bmod 21$.
      Warum können Sie nicht analog zum Aufgabenteil a. vorgehen?

6. Vollständige Induktion

   Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$